# ΣΕΙΡΑ Α'

## Ζήτημα 1ο (3 μονάδες)

Έστω τα γεγονότα $A$ = {ο εξεταζόμενος γνωρίζει την απάντηση}

$B$ = {ο εξεταζόμενος απαντά σωστά}

Από την εκφώνηση: $P(A) = 0{,}8$ , $P(B|A) = 1$ , $P(B|\bar{A}) = 0{,}33$

Από θεώρημα ολικής πιθανότητας: $P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) =$

$$= 1\cdot 0.8 + 0{,}33\cdot(1-0.8) = 0{,}866$$

Από θεώρημα Bayes: $P(A|B) = P(B|A)\cdot\dfrac{P(A)}{P(B)} = 1\cdot\dfrac{0{,}8}{0{,}866} = 0{,}923$

(πιθανότητα να γνωρίζει ο εξεταζόμενος την απάντηση ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ότι απάντησε σωστά)

## Ζήτημα 2ο (3 μονάδες)

α) Poisson με $P(X=0) = 0{,}1$ , $t = 1$ ώρα.

Γενικά $P(X=x) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^x}{x!}$

$$\Rightarrow 0{,}1 = e^{-\lambda\cdot 1}\frac{(\lambda\cdot 1)^0}{0!} = e^{-\lambda} \Leftrightarrow \lambda \simeq 2{,}3 \text{ τηλ/ώρα}$$

β) $P(X=5) = e^{-2{,}3\cdot 1}\dfrac{(2{,}3\cdot 1)^5}{5!} \simeq 0{,}05377$

γ) $P(X\geq 3) = 1 - P(X\leq 2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] =$

$$= 1 - \left[e^{-2{,}3}\frac{2{,}3^0}{0!} + e^{-2{,}3}\frac{(2{,}3)^1}{1!} + e^{-2{,}3}\cdot\frac{(2{,}3)^2}{2!}\right] \simeq 0{,}4039$$

## Ζήτημα 3ο (4 μονάδες)

Πρέπει $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Το ολοκλήρωμα είναι $\displaystyle\int_0^2\left(\frac{x}{5}+\alpha\right)dx =$

$$= \frac{x^2}{10}\Big|_0^2 + \alpha x\Big|_0^2 = \frac{4}{10} + 2\alpha \text{ . Άρα } \alpha = \frac{3}{10} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{1}{3} & 0\leq x\leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f(x)dx = \int_0^2\left(2x^2+\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{5}+\frac{3}{10}\right)dx = \int_0^2\left(\frac{2x^3}{5}+\frac{3x^2}{5}+\frac{x^2}{15}+\frac{x}{10}\right)dx$$

$$= \frac{2x^4}{20} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^3}{45} + \frac{x^2}{20}\Big|_0^2 = \frac{161}{45} = 3.57$$

Λύση 2: $E[Y] = E\left[2X^2 + \frac{X}{3}\right] = 2E[X^2] + \frac{1}{3}E[X] =$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \dots = 3.57$$

# ΣΕΙΡΑ Β'

## Ζήτημα 1ο (3 μονάδες)

Αρχικά ο Γιάννης έχει $2 \times 20€ + 1 \times 10€$ (σύνολο 3 χαρτονομίσματα)

η Μαρία έχει $1 \times 20€ + 5 \times 10€$ (σύνολο 6 χαρτονομίσματα)

Έστω τα γεγονότα $A = \{$η Μαρία βγάζει $20€\}$

$B = \{$ο Γιάννης έδωσε στη Μαρία $10€\}$

$\bar{B} = \{$ο Γιάννης έδωσε στη Μαρία $20€\}$

Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι:

$P(B) = \frac{1}{3}$ $\quad P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$ $\quad P(A|B) = \frac{1}{7}$ $\quad P(A|\bar{B}) = \frac{2}{7}$

Από θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{21}$$

Από θεώρημα Bayes $\quad P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{21}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

(πιθανότητα να έδωσε ο Γιάννης $10€$ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ότι η Μαρία έβγαλε $20€$)

## Ζήτημα 2ο (3 μονάδες)

α) Poisson με $P(X=0) = 4 P(X=4)$ σε $t = 1sec$

Γενικά $P(X=x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^0}{0!} = 4 e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^4}{4!} \Leftrightarrow \lambda^4 = 6 \Leftrightarrow \lambda \simeq 1{,}565 \text{ μην/sec}$$

β) $P(X=2) = e^{-1{,}565} \cdot \frac{(1{,}565)^2}{2!} \simeq 0{,}256$

γ) $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$$e^{-1{,}565} \cdot \frac{1{,}565^0}{0!} + e^{-1{,}565} \cdot \frac{1{,}565^1}{1!} + e^{-1{,}565} \frac{1{,}565^2}{2!} \simeq 0{,}792$$

## Ζήτημα 3ο (4 μονάδες)

Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Άλλα το ολοκλήρωμα είναι $\int_0^1 \alpha x(1-x)dx =$

$$= \alpha \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \alpha \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\alpha}{6} \quad \text{Άρα} \quad \alpha = 6 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$P\left(X \le \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} 6x(1-x)dx = 6 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{32} = 0{,}156$$